УДК 517.95

В. А. Богатырев

ПРОБЛЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ АФФИННО-МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Доказана теорема единственности для строго выпуклых аффинно-минимальных поверхностей, натянутых на контур, часть которого γ — свободная граница. Поверхность $u = u(x, y)$ и кривая γ соответствуют стационарному значению функционала

$$I(u, \gamma) = \int\limits_{G_\gamma} [(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)^{1/4} + q(x, y)]\, dxdy,$$

где

$$b(x, y) > 0,\ q_y(x, y) < 0,\ (x, y) \in G_\gamma.$$

1. Следуя [1], определим эквиаффинную площадь строго выпуклой поверхности, задаваемой уравнением $u = u(x, y)$, $(x, y) \in G \subset E^2$,

$$S(\Phi) = \int\limits_G A^{1/4} dxdy, \quad A = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 > 0.$$

Поверхность Φ называется аффинно-минимальной, если на ней функционал S стационарен, т. е. его вариация δS равна нулю. Функция $u(x, y)$, задающая аффинно-минимальную поверхность, удовлетворяет уравнению

$$u_{xx}(A^{-3/4})_{xx} + 2u_{xy}(A^{-3/4})_{xy} + u_{yy}(A^{-3/4})_{yy} = 0. \tag{1}$$

Цель настоящей работы — рассмотрение проблемы единственности для краевой задачи (1), (2)

$$u(0, y) = u(1, y),\ u(x, 0) = 0,\ -\frac{\partial u}{\partial n}(x, 0) = c,\ n \text{ — внешняя нормаль},$$

$$u(x, \varphi(x)) = \lambda_0, \quad \lambda_0 > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x, \varphi(x)) = \sqrt{\lambda}, \quad \lambda > c^2 > 0, \tag{2}$$

$$\lambda(1+\lambda)^{-3/2} k_\gamma K^{-1} \frac{\partial}{\partial n} K^{1/4} + (1+\lambda)^{-1/2} K^{1/4} + 4/3q = 0, \quad (x, y) \in \gamma,$$

(k_γ — кривизна кривой γ; K — гауссова кривизна поверхности Φ; $G = \{(x, y) \mid x \in (0, 1),\ y \in (0, \varphi(x))\}$, $\varphi(x)$ — периодическая функция, задающая свободную (неизвестную) границу γ; $q(x, y)$ — положительная функция) и свойства соответствующего этой задаче функционала

$$I(\Phi) = \int\limits_G (A^{1/4} + q)\, dxdy. \tag{3}$$

Мы сохраняем термин «аффинно-минимальная поверхность», учитывая то обстоятельство, что стационарное значение функционала (3) достигается на паре (u, γ), где функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнию (1).

2. Вычислим первую вариацию функционала I, определенного формулой (3). Предполагая, что все необходимые условия гладкости удовлетворены, из формулы для вариации n-кратного интеграла со свободной границей [2] получаем

$$\delta I = \int\limits_G h[(F_{u_{xx}})_{xx} + (F_{u_{xy}})_{xy} + (F_{u_{yy}})_{yy}]\, dxdy +$$

$$+ \int\limits_{\partial G} [F\delta x + F_{u_{xx}}h_x - (F_{u_{xx}})_x h + 1/2F_{u_{xy}}h_y - 1/2(F_{u_{xy}})_y h] \cos(n, x)\, dl +$$

$$+ \int\limits_{\partial G} [E\delta y + F_{u_{yy}}h_y - (F_{u_{yy}})_y h + 1/2F_{u_{xy}}h_x - 1/2(F_{u_{xy}})_x h] \cos(n, y)\, dl, \tag{4}$$

где $h(x, y)$ — вариация функции $u(x, y)$ при неизменной области G. Для полных вариаций функций u, u_x, u_y справедливы равенства (3)

$$\begin{aligned} \delta u &= h + u_x \delta x + u_y \delta y, \\ \delta u_x &= h_x + u_{xx} \delta x + u_{xy} \delta y, \\ \delta u_y &= h_y + u_{yx} \delta x + u_{yy} \delta y. \end{aligned} \tag{5}$$

Из (5) и граничных условий для $u(x, y)$ следует, что криволинейные интегралы в формуле (4) отличны от нуля только вдоль свободной границы γ. Рассмотрим их подробнее. Во-первых, $u(x, \varphi(x)) = \lambda_0$, и, следовательно, вариация функции δu равна нулю на γ. Из (5) получаем $h = -u_x \delta x - u_y \delta y = -(\nabla u, \delta\gamma)$. Но на линии уровня $|\nabla u| = \frac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u, n)$. Поэтому

$$h = -|\nabla u|(\delta\gamma, n) = -|\nabla u|\delta n = -\sqrt{\lambda}\delta n. \tag{6}$$

Далее, из условия $u_x^2 + u_y^2 = \lambda$ на γ следует $u_x \delta u_x + u_y \delta u_y = 0$, или в силу (5) $u_x h_x + u_y h_y + (u_x u_{xx} + u_y u_{yx}) \delta x + (u_x u_{xy} + u_y u_{yy}) \delta y = (\nabla u, \nabla h) + 1/2 (\nabla(|\nabla u|^2), \delta\gamma) = 0$.

Воспользовавшись ортогональностью градиента к линии уровня

$$|\nabla(|\nabla u|^2)| = \frac{\partial}{\partial n}(|\nabla u|^2) = (\nabla(|\nabla u|^2), n), \text{ получим } |\nabla u| \frac{\partial h}{\partial n} +$$

$$+ 1/2 |\nabla(\nabla u|^2)|(\delta\gamma, u) = \sqrt{\lambda}\frac{\partial h}{\partial n} + 1/2|\nabla(|\nabla u|^2)|\delta n,$$

откуда

$$\frac{\partial h}{\partial n} = -1/2\lambda^{-1/2}|\nabla(|\nabla u|^2)|\delta n = -|\nabla|\nabla u||\delta n = -\frac{\partial}{\partial n}|\nabla u|\delta n. \tag{7}$$

Далее, $F = A^{1/4} + q$, $F_{u_{xx}} = 1/4 A^{-3/4} u_{yy}$, $F_{u_{yy}} = 1/4 A^{-3/4} u_{xx}$, $F_{u_{xy}} = -1/2 A^{-3/4} u_{xy}$. Поэтому члены подынтегрального выражения, содержащие h_x, h_y, примут вид

$$1/4 A^{-3/4} [h_x (u_{yy} u_x - u_{xy} u_y) + h_y (u_{xx} u_y - u_{xy} u_x)] |\nabla u|^{-1}. \tag{8}$$

Из $u(x, y) = \lambda_0$, $u_x^2 + u_y^2 = \lambda$ на γ следует $u_x dx + u_y dy = 0$, $(u_x u_{xx} + u_y u_{yx}) dx + (u_x u_{xy} + u_y u_{yy}) dy = 0$,
что при условии $(dx)^2 + (dy)^2 \neq 0$ влечет за собой равенства

$$(u_x u_{xx} + u_y u_{yx})(u_x)^{-1} = (u_x u_{xy} + u_y u_{yy})(u_y)^{-1}$$

или

$$(u_y u_{xx} - u_x u_{xy})(u_y)^{-1} = (u_x u_{yy} - u_y u_{xy})(u_x)^{-1}. \tag{9}$$

Используя (9), выражение (8) преобразуется к одному из следующих видов:

$$\begin{aligned} &1/4\lambda^{-1/2} A^{-3/4} (u_y u_{xx} - u_x u_{xy})(u_y)^{-1} \frac{\partial h}{\partial n} = \\ &= 1/4\lambda^{-1/2} A^{-3/4} (u_x u_{yy} - u_y u_{yx})(u_x)^{-1} \frac{\partial h}{\partial n} = \\ &= 1/8\lambda^{-1/2} A^{-3/4} \left(\Delta u - u_{xy}\frac{\lambda}{u_x u_y}\right)\frac{\partial h}{\partial n}. \end{aligned} \tag{10}$$

Преобразуем выражения, содержащие h.

Так как

$$(F_{u_{xx}})_x + 1/2 (F_{u_{xy}})_y = 1/4 [u_{yy} (A^{-3/4})_x - u_{xy} (A^{-3/4})_y],$$

$$(F_{u_{yy}})_y + 1/2 (F_{u_{xy}})_x = 1/4 [u_{xx} (A^{-3/4})_y - u_{xy} (A^{-3/4})_x],$$

то

$$\{[-(F_{u_{xx}})_x - 1/2 (F_{u_{xy}})_y] \cos(n, x) + [-(F_{u_{yy}})_y -$$

$$- 1/2 (F_{u_{xy}})_x] \cos(n, y)\} h = -1/4 h\lambda^{-1/2} [(A^{-3/4})_x \times$$

$$\times (u_x u_{yy} - u_y u_{xy}) + (A^{-3/4})_y (u_y u_{xx} - u_x u_{xy})] =$$

$$= -1/4h\lambda^{-1/2} (u_x)^{-1} (u_x u_{yy} - u_y u_{xy}) \frac{\partial}{\partial n} A^{-3/4} =$$

$$= -1/4h\lambda^{-1/2} (u_y)^{-1} (u_y u_{xx} - u_x u_{xy}) \frac{\partial}{\partial n} A^{-3/4} =$$

$$= -1/8h\lambda^{-1/2} (\Delta u - \lambda (u_x u_y)^{-1} u_{xy}) \frac{\partial}{\partial n} A^{-3/4}. \tag{11}$$

Наконец,

$$F\delta x \cos(n, x) + F\delta y \cos(n, y) = F(\delta\gamma, n) = F\delta n = (A^{1/4} + q)\,\delta n. \tag{12}$$

Из формул (6), (7), (10) — (12) следует, что граничные интегралы в равенстве (4), определяющем первую вариацию функционала (3), приводятся к виду

$$\int_\gamma \left[1/8 (\Delta u - \lambda (u_x u_y)^{-1} u_{xy}) A^{-3/4} \frac{\partial}{\partial n} \ln (A^{3/4} |\nabla u|)^{-1} + A^{1/4} + q \right] \delta n dl. \tag{13}$$

Получим формулу (13) в инвариантном виде. Для этого рассмотрим нелинейную систему уравнений:

1) $u_x^2 + y_y^2 = \lambda$;

2) $(u_y u_{xx} - u_x u_{xy}) (u_y)^{-1} = (u_x u_{yy} - u_y u_{xy}) (u_x)^{-1}$;

3) $k_\gamma (-u_y^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} - u_x^2 u_{yy}) (u_x^2 + u_y^2)^{-3/2}$;

4) $K = (u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2)(1 + u_x^2 + u_y^2)^{-3/2}$;

5) $H = 1/2\, [(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy}] (1 + u_x^2 + u_y^2)^{-3/2}$,

k_γ — кривизна γ; K — гауссова и H — средняя кривизны поверхности Φ.

Воспользовавшись тем, что уравнения (2), (3) и (5) линейны относительно вторых производных, после алгебраических преобразований получим

$$\Delta u - \lambda (u_x u_y)^{-1} u_{xy} = -2k_\gamma \sqrt{\lambda} \tag{14}$$

и

$$k_\gamma^2 \lambda + 2H (1 + \lambda)^{1/2} \lambda^{1/2} k_\gamma + K (1 + \lambda) = 0. \tag{15}$$

Остается заметить, что $A = K(1 + \lambda)^2 = -k_\gamma \sqrt{\lambda} \frac{\partial}{\partial n} |\nabla u|$, и формула (13) примет вид

$$\int_\gamma \left\{ 3/4 \left[K^{1/4} (1 + \lambda)^{-1/2} + \lambda (1 + \lambda)^{-3/2} k_\gamma K^{-1} \frac{\partial}{\partial n} K^{1/4} \right] + q \right\} \delta n dl. \tag{16}$$

Таким образом, всякое решение задачи (1), (2) определяет стационарное значение функционала (3).

3. Пусть поверхность Φ обращена выпуклостью в сторону $u < 0$. Так как гауссова кривизна строго выпуклой поверхности $K > 0$, а $\operatorname{sgn} K = \operatorname{sgn} (u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2)$, то

$$u_{xx} > 0, \quad u_{yy} > 0, \quad (x, y) \in G. \tag{17}$$

Из (17) следует, что u_y возрастает по переменной y, а из (2) в силу того, что $u_y (x, 0) = -\frac{\partial u}{\partial n} (x, 0) = c$, $c > 0$, следует, что $u_y (x, y) > 0$ при $0 \leqslant y < \varphi (x)$. Далее $u_y \neq 0$ на γ, так как $u_x + u_y y' = 0$, и равенство $u_x^2 + u_y^2 = 0$ противоречит граничному условию $\frac{\partial u}{\partial n} (x, \varphi (x)) = \sqrt{\lambda} > 0$. Таким образом, если функция u_y непрерывна в $\bar{G}$, то она строго положительна, что позволяет сделать замену переменных $(x, y) \to (x, u)$, якобиан которой

$$\frac{\partial (x, u)}{\partial (x, y)} = u_y > 0, \quad (x, y) \in \bar{G}, \tag{18}$$

а образ отображения — область с неподвижными границами

$$\overline{D} = \{(x, u) \mid x \in [0, 1], \ u \in [0, \lambda_0]\}.$$

При этом новая неизвестная функция $y = y(x, u)$ является однозначным решением уравнения $u = u(x, y)$ и обладает той же гладкостью в $\overline{D}$, что и функция $u(x, y)$ в $\overline{G}$.

Для того чтобы сделать замену переменных в функционале (3), воспользуемся легко получаемыми из тождества $y \equiv y(x, u(x, y))$ равенствами

$$u_y = (y_u)^{-1}, \quad u_x = -y_x (y_u)^{-1}. \tag{19}$$

Мы упростим счет, если заметим, что из приведенной в п. 2 формулы для гауссовой кривизны $K = (u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)(1 + u_x^2 + u_y^2)^{-2}$ следует

$$A = K(1 + u_x^2 + u_y^2). \tag{20}$$

Гауссова кривизна, будучи отношением квадратичных форм поверхности, инвариантна относительно диффеоморфизмов, а $1 + u_x^2 + u_y^2 = (1 + y_x^2 + y_u^2)(y_u)^{-2}$. Поэтому в новых переменных функционал (3) примет вид

$$J(\tilde{\Phi}) = \int_D [\tilde{A}^{1/4} + qy_u]\, dx du, \quad \tilde{A} = y_{xx}u_{uu} - y_{xu}^2. \tag{21}$$

Замечательно, что уравнение Эйлера для функционала (21) есть уравнение (1) для новой неизвестной функции $y = y(x, u)$, т. е. выполнена теорема Нетер [3]. Более того, $\tilde{\Phi}$ — строго выпуклая аффинно-минимальная поверхность, описываемая уравнением

$$y = y(x, u), \quad (x, u) \in \overline{D}.$$

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что $y(x, u)$ достаточно гладкие решения уравнения (1), удовлетворяющие пересчитанным в переменных (x, u) граничным условиям (2).

4. Предположим, что $y_0(x, u)$, $y(x, u)$ — функции, описанные в п. 3. Рассмотрим семейство функций

$$y(t) = (1 - t)\, y_0(x, u) + ty(x, u) \quad (x, u) \in \overline{D}, \quad t \in [0, 1], \tag{22}$$

содержащее поверхности $\tilde{\Phi}_0$ и $\tilde{\Phi}$ соответственно при $t = 0$ и $t = 1$. Покажем, что функция

$$\sigma(t) = \int_D [\tilde{A}^{1/4}(t) + q(x, y(t))\, y_n(t)]\, dx du \tag{23}$$

есть выпуклая функция параметра t. В [1] доказано, что вторая производная интеграла

$$S(t) = \int_D \tilde{A}^{1/4}(t)\, dx du \tag{24}$$

неположительна. Рассмотрим оставшуюся часть интеграла $\sigma(t)$ и покажем, что при некотором дополнительном условии на функцию $q(x, y)$

$$Q''_{t^2} = \left[\int_D q(x, y(t))\, y_u(t)\, dx du\right]''_{t^2} \leqslant 0. \tag{25}$$

Действительно,

$$Q''_{t^2} = \int_0^1 \int_0^{\lambda_0} [q_{yy}y_u(\delta y)^2 + 2q_y\delta_y(\delta y)_u]\, dx du =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\lambda_0} \frac{\partial}{\partial u} [q_y(\delta y)^2]\, dx du = \int_0^1 q_y(x, y(t;\ x, \lambda_0))(\delta y)^2\, dx. \tag{26}$$

Последнее равенство в (26) — следствие формулы Грина и равенства $\delta y = y(x, \lambda_0) - y_0(x, \lambda_0) = 0$.

Таким образом, если потребовать выполнения для всех $(x, y) \in G$ неравенства

$$q_y(x, y) < 0, \tag{27}$$

то, очевидно, $Q''_{t^2} \leqslant 0$, и, следовательно,

$$\frac{d^2\sigma(t)}{dt^2} = \frac{d^2S(t)}{dt^2} + \frac{d^2Q(t)}{dt^2} \leqslant 0. \tag{28}$$

Так как поверхности $\tilde{\Phi}_0$ и $\tilde{\Phi}$ являются стационарными точками для функционала (23), то $\sigma'_t = 0$ при $t = 0$ и $t = 1$. Из выпуклости функции $\sigma(t)$ следует, что

$$\frac{d^2\sigma(t)}{dt^2} \equiv 0. \tag{29}$$

Более того, оба слагаемые в формуле (28) неположительны, и, следовательно, из тождества (29) вытекает, что

$$\frac{d^2S(t)}{dt^2} \equiv 0, \quad \frac{d^2Q(t)}{dt^2} \equiv 0. \tag{30}$$

Как показано в [1], из первого тождества в (30) следует совпадени решений всюду в области D, а из второго — в силу формулы (26) — равенство $y_0(x, \lambda_0) \equiv y(x, \lambda_0)$ и, следовательно, совпадение свободных граениц для поверхностей Φ_0 и Φ. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Строго выпуклая аффинно-минимальная поверхность, задаваемая уравнением

$$u = u(x, y), \quad (x, y) \in G,$$

и свободная граница γ, задаваемая уравнением

$$y = \varphi(x), \quad x \in (0, 1),$$

однозначно определяются граничными условиями (2), если функция $q(x, y)$ удовлетворяет неравенству (27).

1. *Погорелов А. В.* Однозначная определенность аффинно-минимальных гиперповерхностей // Докл. АН СССР.— 1987.— **297**, № 6.— С. 1315—1316.
2. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление.— М. : Наука, 1961.— 228 с.
3. *Цлаф Л. Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения.— М. : Наука, 1970.— 192 с.

Донец. ун-т

Получено 25.11.90